

## LECTOREM.

**P**ostquam finem exercitationibus hisce imponere decreveram diversa mihi alia, Amice Lector, jucundissimæ ac perpulchræ contemplationis argumenta superesse deprehendi quæ, si pro eorum dignitate pertractata Sectionibus hisce adjunxissent, non parùm & meis laboribus ornamentis, & tuis fortè studiis adjumenti commodique attulissem; sed tam labor quam opus in immensum accrevisset. Quocirca cum inter alia præcedentibus Sectionibus pertractata, modum, quo, elegantiores & sublimiores quædam Propositiones, partim ab Antiquis, partim à præstantissimis hujus sæculi Mathematicis ingeniosissimè inventæ, ab ipsis investigatæ fuerint, illævé Analyticæ artis præsidio invenire possint, ostenderim: haud alienum ab instituto judicavi, si, ad uberiores hujus artis usum, ea, quæ Nobilissimus atque Clarissimus D. CHRISTIANUS HUGENIUS nuper de Ratiociniis in aleæ ludo adinvenit mihi quæ conscripta communicavit, hîc unà cum ipsius literis, reliquorum, quæ mihi supersunt, loco, adjicerem. [518]Quem igitur illius tractatum vel eò tibi acceptiorem fore confido, quò ea quæ inibi traduntur & subtiliora & à vulgo remotiora esse invenies; præsertim cum ad horum investigationem eadem mecum Analysis, cujus olim fundamenta à me edoctus est, utatur; atque ita ejus studiosis viam ad consimiles questiones resolvendas aperiar. In quibus si cum reliquis nostris laboribus amplam tibi satis, Benevole Lector, in hoc studiorum genere exercitationis ansam præbuisse videar; animum exinde meum tui studiosissimum (ut spero) agnosces, ac nostram proinde operam in tui & Reipublicæ Literariæ bonum susceptam in bonam partem interpretaberis. Vale

## CHRISTIANUS HUGENIUS

Clarissimo Viro,

D. FRANCISCO. SCHOTENIO

S.D.

**C**vm in editione elegantissimorum ingenii tui monumentorum, quam præ manibus nunc habes, Vir Clarissime, id inter cætera te spectare sciam, ut varietate rerum, quarum tractationem instituisti, ostendas quàm latè se protendat divina Analytices scientia, facilè intelligo etiam illa plurimùm proposito tuo inservire posse, quæ de aleæ ratiociniis conscripsimus; quantò enim minus rationis terminis comprehendì posse videbantur, quæ fortuita sunt atque incerta, tantò admirabilior ars censebitur, cui ista quoque subjacent. Quare cum in tui gratiam primùm illa exponenda suscepim, túque digna existimes, quæ simul cum subtilissimis tuis inventis in lucem exeant, adeò tibi non refragabor, ut etiam è re mea esse existimem hâc potissimùm ratione ipsa in manus hominum pervenire. Quippe cum in re levi ac frivola operam collocasse videri alioqui possem, non tamen prorsus utilitatis expers ac nullius pretii censebitur, quòd tu veluti inter tua adoptaveris, nec sine multo labore è vernacula lingua nostra in Latinam converteris. Quanquam, si quis penitiùs ea quæ tradimus examinare cæperit, non dubito quin continuò reperturus sit, rem non ut videtur ludicram agi, sed pulchræ subtilissimæque contemplationis fundamenta explicari. Et Problemata quidem quæ in hoc genere proponuntur, nihilo minus profundæ indaginis visum iri confido, quàm quæ Diophanti libris continentur, voluptatis autem aliquantò plus habitura, cum non, sicut illa, in nuda numerorum consideratione terminentur. Sciendum verò, quod jam pridem inter præstantissimos totâ Galliâ Geo[520]metras calculus hic agitatus fuerit, ne quis indebitam mihi primæ inventionis gloriam hac in re tribuat. Cæterùm illi, difficillimis quibusque quæstionibus se invicem exercere soliti, methodum suam quisque occultam retinuére, adeò ut à primis elementis universam hanc materiam evolvere mihi necesse fuerit. Quamobrem ignoro etiamnum an eodem mecum principio illi utantur; at in resolvendis Problematís pulchrè nobis convenire sæpenumero expertus sum. Horum Problematum non nulla in fine operis addidisse me invenies, ommissa tamen analysi, cum quòd prolixam nimis operam poscebant, si perspicuè omnia exequi voluissem, tum quòd relinquendum aliquid videbatur exercitationi nostrorum, si qui erunt, Lectorum. Vale.

Dat.Hagæ Com.  
27 Apr. 1657.

DE  
**RATIOCINIIS**  
 IN  
 LUDO ALEÆ.

**E**T si lusionum, quas sola sors moderatur, incerti solent esse eventus, attamen in bis, quantò quis ad vincendum quàm perdendum propior sit, certam semper habet determinationem. Ut si quis primo jacta unâ tesserâ senarium jacere contendat, incertum quidem an vincet; at quantò verisimilius sit eum perdere quàm vincere, reipsâ definitum est, calculoque subducitur. Ita quoque, si cum aliquo certem hâc ratione, ut ternis lusibus constet victoria, atque ego jam unum lusum vicerim, incertum adhuc uter nostrûm prior tertii victor sit evasurus. Verùm quanti exspectatio mea, & contra quanti illius, æstimari debeat, certissimo ratiocinio consequi licet, atque hinc definire, si ludum uti est imperfectum linquere inter nos convenerit, quantò major portio ejus quod depositum est mihi quàm adversario meo tribuenda esset: vel etiam si quis in locum sortemque meam succedere cupiat, quo pretio me eam ipsi vendere æquum sit. Atque hinc innumeræ questiones exoriri possunt inter duos, tres, plurésve collusores. Cumque minimè vulgaris sit hujusmodi supputatio, & sæpè utiliter adhibeatur, breviter hîc quâ ratione aut methodo expedienda sit exponam, ac deinde etiam, quæ ad aleam sive tesseras propriè pertinent, explicabo.

Hoc autem utrobique utar fundamento: nimirum, in aleæ ludo tanti estimandam esse cujusque sortem seu expectationem ad ali[522]quid obtinendum, quantum si habeat, possit denuò ad similem sortem sive expectationem pervenire, æquâ conditione certans. Ut, exempli gratiâ, si quis me inscio alterâ manu 3 solidos occultet, alterâ 7 solidos, mihi que optionem det ex utrâ manu solidos accipere mâlim; hoc tantundem mihi valere dico, ac si 5 solidi mihi dentur. Quoniam quinque solidos habens, denuò eò pervenire possum, ut æquam expectationem nanciscar ad 3 vel 7 solidos obtinendos: idque æquo lusu contendens.

P R O P O S I T I O I.

Si  $a$  vel  $b$  expectem, quorum utrumvis æquè facillè mihi obtingere possit, expectatio mea dicenda est valere  $(a + b)/2$ .

Ad hanc regulam non solùm demonstrandum, verùm etiam primitùs eruendam posito  $x$  pro eo quod æquivalet expectationi meæ, oportet me, quùm  $x$  habeo, rursus ad similem sortem pervenire posse, æquâ conditione certantem. Ponatur itaque lusus esse talis, ut cum altero certem hâc conditione, ut quisque deponat  $x$ , ac ut victor victo traditurus sit  $a$ . Hic autem lusus justus est, & patet me hâc ratione sequam habere sortem ad obtinendum  $a$ , si lusum perdam scilicet; aut  $2x - a$ , si vincam: tum enim obtineo  $2x$ , id nempe quod depositum est, de quo alteri erogandum est  $a$ . Quòd si autem  $2x - a$  tantundem valeret atque  $b$ , æqua mihi sors obtingeret ad  $a$  quàm ad  $b$ . Pono itaque  $2x - a = b$ , & fit  $x = (a + b)/2$ , pro valore meæ expectationis. Cujus demonstratio facilis est. Etenim habens  $(a + b)/2$  possum cum alio certare, qui etiam  $(a + b)/2$  deponere volet, hâc conditione ut vincens victo sit traditurus  $a$ . Quâ ratione similis expectatio mihi obtinget ad obtinendum  $a$ , Si perdam, aut ad obtinendum  $b$ , si vincam; tum enim obtineo  $a + b$ , id nempe quod depositum est, alterique inde concedo  $a$ .

In numeris. Si ad 3 vel 7 æqua sors mihi obtingat, tum expectatio mea per hanc Propositionem valet 5; & certum est me 5 habentem rursus ad eandem expectationem pervenire posse. Si enim cum alio certans 5 deponam, atque ille similiter 5 deponat, hâc conditione, ut, qui vincit, alteri sit daturus 3: erit hic lusus omnino justus, & pa[523]tet mihi æquam obtingere sortem ad obtinendum 3, si perdam; aut 7, si vincam: quoniam tunc obtineo 10, de quo alteri concedo 3.

P R O P O S I T I O II.

Si  $a$ ,  $b$ , vel  $c$  expectem, quorum unumquodque pari facilitate mihi obtingere possit, expectatio mea æstimanda est  $(a + b + c) / 3$ .

Ad quod rursus inveniendum, ponatur, ut ante,  $x$  pro valere expectationis meæ. Oportet ergo me, cùm  $x$  habeo, ad eandem expectationem pervenire posse justo lusu. Ponatur lusus esse talis, ut cùm duobus aliis ludam hâc cenditione, ut quisque nostrum trium deponat  $x$ , & ut cum uno hoc pactum aggrediar, si ipse victor evadat, mihi sit daturus  $b$ , & ego ipsi traditurus sim  $b$ , si idem mihi obtingat. Cum altero autem hanc meam conditionem, ut ille ludum vincens mini traditurus sit  $c$ , aut ego ipsi sim daturus  $c$ , si ego vincam. Et patet hanc ludum justum esse. Æquam autem hâc ratione sortem habebō ad obtinendum  $b$ , si nimirum primus vincat, aut  $c$ , Si secundus vincat, aut etiam  $3x - b - c$ , Si ego vincam; tunc enim obtineo  $3x$ , quod depositum est, de quo uni concedo  $b$ , & alteri  $c$ . Quòd si  $3x - b - c$  æquale fuerit ipsi  $a$ , eadem mihi obtingeret expectatio ad obtinendum  $a$ , quæ ad  $b$ , aut ad  $c$ . Pono itaque  $3x - b - c = a$ , & fit  $x = (a + b + c) / 3$ , pro valere meæ expectationis. Eodem modo invenitur, si ad  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , aut  $d$  æqua sors mihi obtingat, id tanti valoris esse, quanti  $(a + b + c + d) / 4$ . Atque ita porrò.

P R O P O S I T I O III.

Si numerus casuum, quibus mihi eveniet  $a$ , sit  $p$ ; numerus autem casuum, quibus mihi eveniet  $b$ , sit  $q$ , sumendo omnes casus æquè in proclivi esse: expectatio mea valebit  $(pa + qb) / (p + q)$ .

Ad hanc regulam eruendam, ponatur rursus  $x$  pro valore expectationis meæ ergo oportet me, cùm  $x$  habeo, ad eandem expectationem pervenire posse, ut ante, justo lusu. Ad hoc autem tot colluseres sumam, ut unà mecum numerum ipsius  $p + q$  efficiant, quorum [524]deponat quisque  $x$ , ita ut depositum sit  $px + qx$ , & quisque sibi ludat æquâ expectatione ad vincendum. Porrò cum tot ex hisce collusoribus, quot indicat numerus  $q$ , sigillatim hoc pactum inibo, ut eorum qui vincat mihi sit daturus  $b$ , aut ego contra ipsi idem  $b$ , si vincam. Similiter cum reliquis collusoribus, censituentibus  $p - 1$  sigillatim hanc conditionem aggrediar, ut eorum quisque, qui ludum vincit, mihi sit daturus  $a$ , & ego tantundem ( $a$  scilicet) ipsi, si ego vincam. Et patet hunc lusum hâc conditione justum esse, nemine videlicet injuriam patiente. Deinde patet me nunc  $q$  expectationis habere ad  $b$ , &  $p - 1$  expectationes ad  $a$ , & 1 expectationem (me nempe vincente) ad  $px + qx - bq - ap + a$ , tunc enim obtineo  $px + qx$ , id quod depositum est, de quo tradere debeo  $b$  unicuique  $q$  lusorum, &  $a$  unicuique  $p - 1$  lusorum, quæ simul conficiunt  $ab + pa - a$ . Si itaque  $qx + bx - bq - ap + a$  æquale esset ipsi  $a$ , haberem  $p$  expectationes ad  $a$  (quandoquidem jam  $p - 1$  expectationes ad id habebam) &  $q$  expectationes ad  $b$ , & sic ad priorem meam expectationem rursus pervenissem. Quocircà porro  $px + qx - bq - ap + a = a$ , & fit  $x = (ap + bq) / (p + q)$ , pro valere expectationis meæ, omnino ut in initio positum fuit.

In numeris. Si 3 mihi expectationes forent ad 13, & 2 expectationes ad 8, haberem per hanc regulam tantundem ac 11. Et facile est ostendere, me, si 11 habeam, rursus ad eandem expectationem pervenire posse. Ludens enim contra 4 alios, & quisque nostrum quinque deponens 11, cum duobus ex illis sigillatim pactum inibo, ut horum qui vincat mihi sit daturus 8, aut ego ipsi idem 8, si vincam. Similiter cum duobus reliquis, ut eorum quisque, qui ludum vincit, mihi sit daturus 13, aut ego ipsi tantundem, si ego vincam. Qui quidem lusus justus est. Et patet me hoc modo duas habere expectationes ad 8, nimirum Si alteruter eorum, qui mihi 8 promiserunt, vincat, & 3 expectationes ad 13, nimirum si alteruter reliquorum duorum, qui mihi 13 tradere debent, vincat, aut si ipse ludum vincam: ego enim ludum vincens obtineo depositum, id est, 55, de quo unicuique duorum tradere debeo 13, & unicuique reliquorum duorum 8, ita ut & mihi relinquatur 13.

[525]

P R O P O S I T I O IV.

Ut igitur ad primò propositam quæstionem veniamus, nimirum, de facienda distributione inter diversos collusores, quando eorum sortes inæquales sunt, opus est ut à facilioribus incipiamus.

Sumpto itaque me cum aliquo certare, hoc pacto: ut qui priùs ter vicerit, quod depositum est,

lucretur, & me jam bis vicisse, alterum verò semel. Scire cupio, si lusum prosequi non velimus, sed pecuniam, de qua certamus, prout æquum est, partiri, quantum ejus mihi obtingeret.

Primò considerare oportet lusus, qui utrobique deficiunt. Certum enim est, si inter nos convenerit, verbi gratiâ, ut quod depositum est lucretur is, qui priùs vigesies vicerit, & ego decies & novies vicero, at alter decies & octies, tantò meliorem fore eo casu sortem meam, quantò hîc melior est, ubi à tribus lusibus binos consequutus sum, ille verò unum duntaxat: quia nimirum utrobique mihi unus tantummodò lusus sed ipsi duo deficiunt.

Porrò ad inveniendum quanta pars utrique debeatur, advertendum est quid fieret, si in lusu pergeremus. Certum enim est, si primum ludum vincerem, me præscriptum numerum impleturum & omne depositum consecuturum, id quod vocetur  $a$ . Quod si autem alter primum ludum vinceret, tunc æquata utriusque sors foret, (quippe utrique uno adhuc deficiente ludo) adeoque cederet cuique  $(1/2)a$ . Manifestum autem est, me æquam habere sortem ad primum ludum vincendum aut perdendum, ita ut mihi nunc æqua sit expectatio ad obtinendum  $a$  aut  $(1/2)a$ : quod ipsum per 1<sup>mam</sup> Propositionem tantum est ac si utriusque sortis dimidium, id est,  $(3/4)a$ , haberem; & relinquatur alteri meo collusori  $(1/4)a$ , quæ ipsius portio statim ab initio eodem modo reperiri potuisset. Unde patet, eum, qui ludum meum in se recipere vellet, mihi  $(3/4)a$  pro eo tradere debere, ac proinde semper tria contra unum deponere eum posse, qui unum ludum vincere contendat, priusquam alter duos vincat.

#### P R O P O S I T I O V.

Ponamus unum mihi deficere ludum & collusori meo tres lusus. Oportet hîc facere distributionem.

[526]Advertamus itaque rursus, in quo essemus statu, si ego vel ipse primum vinceret lusum. Si ego vincerem, obtinerem depositum, id est,  $a$ ; quòd si autem ille primum ludum vinceret, deficerent ipsi duo lusus & mihi unus; ac proinde in eodem statu essemus, qui in præcedente Propositione positus fuit, mihi obtingeret  $(3/4)a$ , ut ibi ostensum est. Itaque pari facilitate vel  $a$  mihi obtinget vel  $(3/4)a$ , id quod tantum est, per 1<sup>mam</sup> Propositionem, ac  $(7/8)a$ . Et relinquatur  $(1/8)a$  collusori meo; ita ut mea sors ad sortem illius se habeat, sicut 7 ad 1.

Quemadmodum autem ad hunc calculum requisitus est præcedens ita rursus hicce inservit sequenti: nimirum, si ponamus mihi unum ludum deficere & collusori meo 4<sup>or</sup> lusûs. Et invenitur eodem modo, mihi deberi  $15/16$  istius quod depositum est, & ipsi  $1/16$ .

#### P R O P O S I T I O VI.

Ponamus mihi deficere duos lusus & collusori meo tres lusus.

Fiet itaque primo lusu; vel ut mihi unus lusus deficiat & ipsi tres (unde mihi per præcedentem Propositionem obtinget  $(7/8)a$ ); vel ut cuique nostrum adhuc duo lusus deficiant, unde mihi debebitur  $(1/2)a$ , quandoquidem sic utrique æqua sors futura est. Est mihi autem æqualis facilitas ad primum ludum vincendum aut perdendum; ita ut mihi æqua sit expectatio ad obtinendum  $(7/8)a$  aut  $(1/2)a$ , id quod mihi valet  $(11/16)a$ , per 1<sup>mam</sup> Propositionem. Et debentur mihi 11 partes ejus quod depositum est, & collusori meo 5 partes.

#### P R O P O S I T I O VII.

Ponamus mihi deficere duos lusus & collusori meo quatuor.

Fiet itaque, ut, si primum ludum vincam, unum ludum vincere debeam & alter quatuor; vel, si eundem perdam, duos & alter tres. Ita ut æqua mihi sors obtingat ad  $(15/16)a$  aut  $(11/16)a$ , id quod tantum valet ac  $(13/16)a$ , per 1<sup>mam</sup> Propositionem. Unde patet, eum meliorem habere sortem, qui duos lusus vincere debet dum alter quatuor, quam eum, qui unum dum alter duos. In hoc enim posteriori casu, nimirum ipsius 1 ad 2, portio mea, per 4<sup>tam</sup> Propositionem, est  $(3/4)a$ , quæ minor est quam  $(13/16)a$ .

## P R O P O S I T I O VIII.

Nunc verò ponamus tres esse collusores, quorum primo ut & secundo unus lusus deficiat, sed tertio duo lusus.

Ut igitur inveniatur primi pars, rursus advertendum est, quid ipsi deberetur, si vel ipse vel aliter reliquorum duorum primum lusum vinceret. Si ipse vinceret, haberet depositum, id quod sit  $a$ . Quòd si secundus vinceret, primus nihil haberet, quoniam secundus sic lusui finem imposuisset. At si tertius vinceret, tunc cuique trium adhuc unus deficeret lusus, ideóque tam primo quàm utriusque reliquorum deberetur  $(1/3)a$ . Et fit primo una expectatio ad  $a$ , una ad 0, & una ad  $(1/3)a$  (quandoquidem æquè facilè contingere potest cuique trium ut primum ludum vincat,) quod ipsi tantundem valet ac  $(4/9)a$ , per 2<sup>dam</sup> Propositionem, Et fit similiter secundo  $(4/9)a$ , & remanet tertio  $(1/9)a$ . Cujus pars separatim etiam inveniri potuerat, atque inde reliquorum partes determinari.

## P R O P O S I T I O IX.

Ut tot collusorum, quot quis voluerit, ex quibus uni plures & alii pauciores lusus deficiunt, cujusque pars inveniatur, considerandum est, quid illi, cujus partem invenire volumus, deberetur, si vel ipse, vel quislibet reliquorum primum sequentem ludum vinceret. Horum autem partes si in unam summam colligantur, & aggregatum per numerum collusorum dividatur, quotiens ostendet unius quæsitam partem.

Ponamus tres esse collusores A, B, & C, & ipsi A unum ludum deficere, ipsi B duos lusus, & ipsi C similiter duos lusus. Invenire oportet, quid ipsi B, ejus quod depositum est, debeatur. Id quod vocetur  $q$ .

Primò examinandum est, quid ipsi B deberetur, si vel ipse, vel A, vel C primum sequentem ludum vinceret.

Si A vinceret, ludo finem imposuisset, ac per consequens ipsi B deberetur 0. Si ipse B vinceret, deficeret illi ad hoc unus insus, & ipsi A unus lusus, at ipsi C duo lusus. Quocirca ipsi B hoc in casu deberetur  $(4/9)q$ , per 8<sup>vam</sup> Propositionem.

Denique Si C primum sequentem ludum vinceret, tunc ipsis A & [528]C singulis unus deficeret lusus, sed ipsi B duo lusus, ac per consequens ipsi B deberetur  $(1/9)q$ , per eandem Propositionem 8<sup>vam</sup>. Nunc autem in unam summam colligendum est, id quod in tribus hisce casibus ipsi B deberetur: nimirum, 0,  $(4/9)q$ ,  $(1/9)q$ : quorum summa est  $(5/9)q$ . Quod ipsum divisum per 3, numerum collusorum, dat  $(5/27)q$ . Quæ ipsius B quæsitam partem est. Demonstratio autem hujus patet ex 2<sup>da</sup> Propositione. Quoniam enim B æquam habet sortem ad obtinendum 0,  $(4/9)q$ , vel  $(1/9)q$ , habet per 2<sup>dam</sup> Propositionem tantundem ac  $(0 + (4/9)q + (1/9)q)/3$ , id est,  $(5/27)q$ . Et certum est, hanc divisorem 3 esse numerum collusorum.

Ut autem inveniatur, quid cuiquam debeatur in quolibet casu, videlicet si vel ipse vel aliquis reliquorum primum sequentem ludum vincat: oportet simpliciores casus primò investigare, & horum medio sequentes. Nam sicut hic ultimus casus solvi non potuit, priusquam ille octavæ Propositionis calculo subductus esset, in que deficientes lusus erant 1, 1, 2, ita etiam cujusque pars supputari nequit in tali casu, ubi deficientes lusus sunt 1, 2, 3, quin primùm calculo subductus sit casus deficientium lusuum 1, 2, 2, quemadmodum jam fecimus, & præterea ille, in quo lusus deficientes sunt 1, 1, 3; qui similiter per 8<sup>vam</sup> Propositionem supputari potuisset. Atque hoc quidem pacto consequenter supputare licet casus omnes, qui in sequenti tabulâ comprehenduntur. & infinitos alios.

Tabula pro 3 Collusoribus,

Lusus qui ipsis deficiunt	1 . 1 . 2	1 . 2 . 2	1 . 1 . 3	1 . 2 . 3
Eorum partes.	4 . 4 . 1	17 . 5 . 5	13 . 13 . 1	19 . 6 . 2
	9	27	27	27

Lusus qui ipsis deficiunt	1 . 1 . 4	1 . 1 . 5	1 . 2 . 4	1 . 2 . 5
Eorum partes.	40 . 40 . 1	121 . 121 . 1	178 . 58 . 7	542 . 179 . 8
	81	243	243	729

Lusus qui ipsis deficiunt	1 . 3 . 3	1 . 3 . 4	1 . 3 . 5
Eorum partes.	65 . 8 . 8	616 . 82 . 31	629 . 87 . 13
	81	729	729

Lusus qui ipsis deficiunt	2 . 2 . 3	2 . 2 . 4	2 . 2 . 5	2 . 3 . 3	2 . 3 . 4	2 . 3 . 5
Eorum partes.	34 . 34 . 13	338 . 338 . 53	353 . 353 . 23	133 . 55 . 55	451 . 195 . 83	1433 . 635 . 119
	81	729	729	243	729	2187

[529]Quod ad tesseræ attinet, de iis hæ quæstiones proponi possunt: videlicet, quotâ vice unâ tesserâ senarium jacere periclitandum sit, aut aliquod reliquorum puncturum. Item quotâ vice duos senarios duabus tesseris, aut tres senarios tribus tesseris jacere sit tentandum. Et plures aliæ hujusmodi quæstiones.

Ad quas solvendas advertendum est. Primò unius tesseræ sex esse jactus diversos, quorum quivis æquè facillè eveniat. Sumo enim tesseram habere figuram cubi perfectam. Porrò duarum tesserarum 36 esse diversos jactus, quorum similiter quivis æquè facillè obtingere potest. Nam ratione cujusque jactus unius tesseræ potest unus sex jactuum alterius tesseræ simul contingere. Et sexies 6 efficiunt 36 jactas. Item trium tesserarum esse 216 jactus diversos. Nam ratione cujusque 36 jactuum duarum tesserarum potest unus sex jactuum, qui in 3<sup>ia</sup> sunt, evenire. Et sexies 36 efficiunt 216 jactus. Eodem modo patet, quatuor tesserarum jactus esse sexies 216, id est, 1296; atque sic ulterius jactus quotlibet tesserarum supputari posse, sumendo semper pro accessione unius tesseræ sexies jactus præcedentis.

Porrò notandum, duarum tesserarum unum duntaxat esse jactum, qui 2 aut 12 puncta efficiat, duos verò jactus, qui 3 aut 11 puncta efficiant. Si enim tesseræ vocemus A & B, patet, ad 3 puncta jacienda in A unum & in B duo, vel in B unum & in A duo puncta reperiri posse. Similiter ad 11 puncta jacienda in A quinque & in B sex, vel in A sex & in B quinque puncta patere posse. Quatuor punctorum tres sunt jactus, videlicet, ipsius A 1 & B 3 puncta, vel ipsius A 3 & B 1 punctum; vel ipsius A 2 & B 2 puncta.

Decem punctorum similiter tres sunt jactus.

Quinque vel novem punctorum 4<sup>or</sup> sunt jactus.

Sex vel octo punctorum 5<sup>que</sup> sunt jactus.

Septem punctorum 6 sunt jactus.

In tribus tesseris reperiuntur	$\left\{ \begin{array}{l} 3 \text{ vel } 18 \\ 4 \text{ vel } 17 \\ 5 \text{ vel } 16 \\ 6 \text{ vel } 15 \\ 7 \text{ vel } 14 \\ 8 \text{ vel } 13 \\ 9 \text{ vel } 12 \\ 10 \text{ vel } 11 \end{array} \right\}$	punctorum	$\left\{ \begin{array}{l} 1 \\ 3 \\ 6 \\ 10 \\ 15 \\ 21 \\ 25 \\ 27 \end{array} \right\}$	} jactus
--------------------------------	-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	-----------	-------------------------------------------------------------------------------------------	----------

## P R O P O S I T I O X.

Invenire, quot vicibus suscipere quis possit, ut unâ tesserâ 6 puncta jaciat.

Si quis primâ vice senarium jacere contendat, apparet unum esse casum, quo vincat, habeatque id, quod pignoris loco depositum est; quinque verò esse casus, quibus perdat, & nihil habeat. Sunt enim 5 jactus contra ipsum, & tantùm unus pro ipso. Quod autem depositum est, vocetur  $a$ . Est itaque ipsi unica expectatio ad obtinendum  $a$ , sed quinque ad obtinendum 0; id quod per 2<sup>dam</sup> Propositionem tantundem valet ac  $(1/6)a$ . Et manet pro eo qui ipsi hunc casum offert  $(5/6)a$ . Ita ut tantummodo 1 contra 5 deponere possit, qui primâ vice suscipere velit.

Qui duabus vicibus semel senarium jacere certet, sors ejus hoc pacto computatur. Si primâ vice 6 jaciat, obtinet  $a$ . Si diversum eveniat, unus ipsi restat jactus, qui ex præcedenti tantum valet, quantum  $(1/6)a$ . Atqui ut primâ vice 6 jaciat, unus tantùm casus est, & quinque casus, quibus diversum eveniat. Itaque ab initio unus casus est, qui det ipsi  $a$ ; & quinque qui dent  $(1/6)a$ , id quod per 2<sup>dam</sup> Propositionem valet  $(11/36)a$ . Unde contraccertanti lusori cedit reliquum  $(25/36)a$ ; adeò ut sors utriusque sive æstimatio expectationis eam servet rationem, quam 11 ad 25; id est, minus quàm 1 ad 2.

Hinc eodem modo calculo subducitur, quòd sors ejus, qui tribus vicibus semel senarium jacere suscipit, sit futura  $(91/216)a$ ; ita ut 91 contra 125 deponere possit; id est, paulò minus quàm 3 ad 4.

Qui quatuor vicibus idem suscipit, sors ejus est  $(671/1296)a$ ; ita ut 671 contra 625 deponere possit; id est, plus quam 1 ad 1.

Qui quinque vicibus idem suscipit, sors ejus est  $(4651/7776)a$ , & potest 4651 contra 3125 deponere; id est paulò minus quam 3 ad 2.

Qui sex vicibus idem suscipit, sors ejus est  $(31031/46656)a$ , & potest 31031 contra 15625 deponere; id est paulò minus quam 2 ad 1.

Atque ita consequenter quilibet jactuum numerus inveniri potest. Sed licet majori compendio progredi, ut in sequenti Propositione ostendetur; sine quo calculo aliàs multò prolixior foret.

[531]

## P R O P O S I T I O XI.

Invenire, quot vicibus suscipere quis possit, ut duabus tesseris 12 puncta jaciat.

Si quis primâ vice duos senarios jacere contendat, apparet unum esse casum, quo vincat, id est, ad obtinendum  $a$ ; & 35 esse casus, quibus perdat sive nihil habeat, quoniam 36 sunt jactus. Itaque habet par 2<sup>dam</sup> Propositionem  $(1/36)a$ .

Qui duabus vicibus idem suscipit, si primâ vice duos senarios jaciat, obtinebit  $a$ ; si verò primâ vice diversum eveniat unus ipsi restat jactus, id quod ipsi. per illud quod jam dictum est, valet  $(1/36)a$ .

Atqui ut primâ vice duos senarios jaciat, unus tantum est casus, sed 35 casus, quibus diversum eveniat. Itaque ab initio unus casus est, qui det ipsi  $a$ , & 35 qui dent  $(1/36)a$ ; id quod par 2<sup>dam</sup> Propositionem valet  $(71/1296)a$ . Et remanet contraccertanti  $(1225/1296)a$ .

Ex his invenire licet, qualis sit ei sors aut pars, qui idem suscipit quaternis jactibus, præterundo casum eum, cùm quis illud ternis jactibus suscipit.

Etenim qui 4<sup>or</sup> vicibus duos senarios jacere contendit, si illud 1<sup>ma</sup> aut 2<sup>da</sup> vice faciat, obtinet  $a$ ; sin minùs, restant ipsi duo jactus, qui per illud quod superiùs dictum est, valent  $(71/1296)a$ . Sed propter eandem rationem habet etiam 71 casus, ut ex duobus primis jactibus semel duos senarios jaciat, contra 1225 casus, quibus diversum eveniat. Habet itaque ab initio 71 casus, qui ipsi dent  $a$ , & 1225 casus, qui dent ipsi  $(71/1296)a$ . Quod ipsi par 2<sup>dam</sup> Propositionem valet  $(178991/1679616)a$ . Et remanet contraccertanti  $(1500625/1679616)a$ . Id quod ostendit eorum sortes esse ad se invicem, ut 178991 ad 1500625.

E quibus porrò eâdem ratione invenitur expectatio ejus. qui 8 vicibus semel duos senarios jacere certat. Ac inde rorsus expectatio ejus, qui idem suscipit 16 vicibus. Atque ex hujus expectatione, ut etiam ex expectatione illius, qui istud 8 vicibus suscipit, invenitur expectatio ejus, qui illud 24 vicibus in se recipit. In qua operatione, quoniam præcipuè quæritur in quo numero jactuum æqualis sors incipiat, inter eum qui id suscipit & eum qui offert, licebit à numeris, qui alioquin in immensum excrescerent, posteriores aliquot characteras auferre. Atque ita quidam reperio ei, qui illud 24 vicibus



suscipit, adhuc aliquid deficere; tumque demum eum potioem conditionem inire, cùm 25 jactibus aggreditur.  
[532]

#### P R O P O S I T I O XII.

Invenire, quot tesseris suscipere quis possit, ut primâ vice duos senarios jaciat.

Hoc autem tantundam est, ac si quis scire velit, quoto jactu quispiam unâ tesserâ suscipere possit. ut bis senarium jaciat. Quòd si quis duobus jactibus susciperat, obtingeret ei, per ea quæ ante ostensa sunt,  $(1/36)a$ . Qui illud tribus jactibus in se reciperet, si primus ejus jactus senarius non foret, haberet adhuc duos jactus, quorum uterque senarius esse deberet, id quod tantundem valere dictum est ac  $(1/36)a$ . At verò primo ejus jactu existente senario, opus est ut ex duobus jactibus non nisi semel senarium jaciat. Quod per 10 Propositionem tantundem valet ac si  $(11/36)a$  haberet. Atqui certum est ipsum unum habere casum, quo primâ vice senarium jaciat, & quinque casus quibus diversum eveniat. Habet itaque ab initio unum casum ad  $(11/36)a$ , & 5 casus ad  $(1/36)a$ , id quod per 2<sup>dam</sup> Propositionem tantundem valet ac  $(16/216)a$  seu  $(2/27)a$ . Hoc pacto assumendo continuè unum jactum ampliùs, invenitor 10 jactibus unâ tesserâ, aut 10 tesseris primo jactu suscipi posse, ut duo senarii jaciantur, idque com lucro.

#### PROPOSITIO XIII.

Si curri alio ludam duabus tesseris unum solummodo jactum, hâc conditione, ut, si septenarius eveniat, ego vincam; at ille, si denarius obtingat; si verò quidquam aliud accidat, ut tum id quod depositum est æqualiter dividamus: Invenire qualis istius pars cuique nostrum debeatur.

Quoniam 36 jactuum, qui duabus tesseris proveniunt, 6 jactus existunt septem punctorum, & 3 jactus decem punctorum, restant adhuc 27 jactus. qui ludum æquare possunt; id quod si fiat, cuique nostrum debebitur  $(1/2)a$ . Verùm si id non obtingat, habeo 6 casus, quibus vincam, id est, ut  $a$  habeam; & 3 casus, quibus diversum eveniat, nihilque habeam: id quod par 2<sup>dam</sup> Propositionem, tantundem est ac si tali casu  $(2/3) a$  haberem. Habeo itaque ab initio 27 casus ad  $(1/2) a$ , & 9 casus ad  $(2/3) a$ , id quod, per 2<sup>dam</sup> Propositionem, tantundem est ac  $(13/24)a$ . Et remanet contracertanti  $(11/24)a$ .  
[533]

#### P R O P O S I T I O XIV.

Si ego & alius duabus tesseris alternatim jaciamus, hâc conditione, ut ego vincam simul atque septenarium jaciam, ille verò quàm primùm senarium jaciat; ita videlicet, ut ipsi primum jactum concedam: Invenire rationem meæ ad ipsius sortem.

Ponatur, sortam meam valere  $x$ , & id quod depositum est vocari  $a$ ; eritque sors alterius =  $a - x$ . Et patet, quandocunque ipsius vices jaciendi revertuntur, sortem meam tum rursus debere esse =  $x$ . At quandocunque meæ vices sunt ut jaciam, sors mea pluris æstimanda est. Ponatur itaque pro ejus valore  $y$ . Iam quoniam ex 36 jactibus reperiuntur 5 in 2 tesseris, qui collusori meo senarium dare lusque victorem reddere possunt; & 31 jactus, quibus diversum eveniat, id est, qui meas jaciendi vices promovent: habeo, priusquam jact, 5 casus ad obtinendum 0, & 31 casus ad obtinendum  $y$ . id quod per 3<sup>tiam</sup> Propositionem valet  $31y/36$ . Posuimus autem casum meum à principio essa =  $x$ . Quocirca erit  $31y/36 = x$ , adeoque  $y = 36x/31$ . Deinde positum fuit, vicibus meis venientibus, sortem meam valere  $y$ . Ego verò jacturus, habeo 6 casus ad obtinendum  $a$ , quandoquidam 6 jactus reperiuntur 7 punctorum, qui me victorem reddunt; habeoque 30 casus, quibus vices collusoris mei revertuntur, id est, ut mihi obtineam  $x$ . id quod par 3<sup>tiam</sup> Propositionem valet  $(6 a + 30 x) / 36$ . Hoc autam cum sit =  $y$ , erit, invento, ut ante,  $36x/31 = y$ ,  $(30x + 6a)/36 = 36x/31$ . Unde invenitur  $x = 31a/61$ , valor meæ sortis. Et per consequens collusoris mei erit  $30 a/61$ ; ita ut ratio sortis meæ ad illius sortem sit, ut 31 ad 30.

Coronidis loco subjungantur sequentia Problemata.

*Probl. 1.* A & B unà ludunt duabus tesseris, hâc conditione, ut A vincat, si senarium jaciat, at B si septenarium jaciat. A primò unum jactum instituet; deinde B duos jactus consequenter ; tum rursus A duos jactus, atque sic deinceps, donec hic vel ille victor evadat. Quæritur ratio sortis ipsius A ad sortem ipsius B? Resp. ut 10355 ad 12276.

[534]

*Probl. 2.* Tres Collusores A, B & C assumentes 12 calculos, quorum 4 albi & 8 nigri existunt, ludunt hâc conditione: ut, qui primus ipsorum velatis oculis album calculum elegerit, vincat; ut prima electio sit penes A, secunda penes B & tertia penes C, & tum sequens rursus penès A, atque sic deinceps alternatim. Quæritur, quænam futura sit ratio illorum sortium?

*Probl. 3.* A certat cum B quòd ipse ex 40 chartis lusoriis, id est, 10 cujusque specei, 4 chartas extracturus sit; sit ut ex unaquaque specie habeat unam. Et invenitur ratio sortis A ad sortem B ut 1000 ad 8139.

*Probl. 4.* Assumptis, ut ante, 12 calculis, 4 albis & 8 nigris, certat A cum B, quòd velatis oculis 7 calculos ex iis exempturus sit, inter quos 3 albi erunt. Quæritur ratio sortis ipsius A ad sortem ipsius B.

*Probl. 5.* A & B assumentes singuli 12 nummos ludunt tribus tesseris, hâc conditione: ut, si 11 puncta jaciantur, A tradat nummum ipsi B; at si 14 puncta jaciantur B tradat nummum ipsi A; & ut ille ludum victurus sit, qui primùm omnes habuerit nummos. Et invenitur ratio sortis ipsius A ad sortem ipsius B, ut 244140625 ad 282429536481.

F I N I S.