TOT DEN

L E S E R.

NA dat ick besloten hadt een eynde van deze oeffeningen te maecken, soo heb ick bevonden, dat my, Beminde Leser, noch verscheyde andre dingen van vermaeckelijcke en treffelijcke stoffe overich waren, welcke, soo ickse, na haer waerde verhandelt hebbende, by dese Afdeelingen gevoegt hadde, niet weynigh cieraet aen desen mijnen arbeyt en mogelijck oock hulp en profijt aen uwe Studien souden toe-gebracht hebben; doch de moeyte van die te beschrijven als oock het werck souden my te verdrietig gevallen zijn. Weshalven alsoo ick onder andere dingen, die in de voorgaende Afdeelingen verhandelt zijn, betoont hebbe, op wat wijz sommige der fraeyste en subtijlste Voorstellen, die ten deele van de Oude, en ten deele van de Voortreffelickste Wiskonstenaers deser eeuwe seer aerdig zijn uyt-gevonden, souden mogen zijn gesocht, ofte door behulp der *Algebra* konnen gevonden worden: soo en heb ick 't niet ongerijmt geacht, indien ick, tot overvloediger gebruyck van dese Konst, 't geen onlangs door den Wel-Edelen en Wijt[486]beroemden Heer CHRISTIANVS HUGENIVS aengaende 't reeckenen in Spelen van Geluck uytgevonden ende my in schrift van hem mede gedeelt is, alhier met desselfs brief, in plaets van 't-geene my overig was, by-voegde. Welck sijn Tractaet ick dan UE. des te aengenamer acht te sullen wesen, als 'tgeen daer in verhandelt wordt te subtijlder en ongemeender sal bevonden worden; insonderheyt door dien hy tot desselfs vinding deselve *Analysis*, welckers fondamenten hy eertijts van my geleert heeft, als ick, gebruyckt; en alsoo de bevlytigers van die de weg baent om diergelijcke Voorstellen te ontbinden. Waer in, soo ick nevens mijnen andren arbeyt aen U, Beminde Leser, in dese soort van Studie genoegsame stof van oeffening gegeven hebbe; soo sult ghy daer uyt (gelijck ick hoop) mijne bereytwilligheyt t'uwaerts konnen afnemen, en dienvolgende oock mijnen arbeyt, t'uwen en der Studien besten aengenomen, ten goeden duyden. Vaert wel.

[487]

Aen mijn Heer

F R A N C I S C U S van S C H O O T E N.

Mijn Heer,

N*Aer dien ick weet dat V E., de loffelijcke vruchten van sijn vernuft ende arbeyt in 't licht gevende, onder anderen dit ooghmerck heeft: namentlijck, om door de verscheydenheyt der verhandelde stoffen te betoonen hoe wijt onse uytnemende Konst van* Algebra *sich uytstreckt; soo en twijffele ick oock niet, of het geene ick van de Rekeningh in Spelen van geluck beschreven heb, sal tot V E. opset niet ondienstig zijn. Want soo veel te swaerder als het scheen, door reden te konnen bepalen het geene onseker is ende het geval onderworpen, soo veel te meer verwonderinghs waerdigh sal die weetenschap schijnen, waer door sulcx kan werden te weege gebracht. Dewijl ick dan op V E. versoeck ende aen-maeninghe, dese Rekening eerst heb beginnen by geschrift te stellen, ende V E. deselve waerdigh acht om te gelijck met syne diepsinnige vonden in 't licht te komen; soo en sal ick niet alleen het selve geerne toestaen, maer oock tot mijn voordeel duyden, dat die op dese maniere te voorschijn werde gebracht. Want of sommige mochten dencken dat ick ontrent geringhe dingen en van weynigh gewichte mijn moeyte besteedt hadde, soo en sullen sij nochtans niet t'eenemael voor onnut ende onpryselijck houden, het geene V E. in dier voegen als voor het syne is aen-nemende, en niet sonder arbeyt uyt onse spraeck in de Latijnsche heeft overgeset. Alhoewel ick wil gelooven, so iemandt dese dinghen wat naerder begint in te sien, dat hy haest sal bevinden, geen enckel spel te zijn het geene hier wert verhandelt, maer datter de beginselen en gronden geleyt werden van een seer aerdige en diepe speculatie. Soo sullen oock, meyne ick, de Voorstellen die in dese Materie voorvallen, geensins lichter als die van* Diophantus *geacht werden, doch wel vermaeckelijcker misschien, door diense iets meer inhouden als bloote eygenschappen der getallen. Voorts is te weeten,* [488] *dat al over eenighen tijdt, sommige van de Vermaertste Wiskonstenaers van geheel Vranckrijck met dese soorte van Rekeningh zijn besigh geweest, op dat niemandt hier in, de eer van de eerste Inventie die de myne niet en is, my toe en schryve. Doch sy luyden, ofse wel sich onder malkanderen met veele swaere questien ter proeve stelden, soo hebbense nochtans elck sijn maniere van uytvinding bedeckt gehouden. Soo dat ick van noode gehad heb, alles van vooren aen selfs te ondersoecken en te doorgronden: ende daerom oock noch niet verseeckert en ben, of wij hier in een selfde eerste beginsel getroffen hebben. Maer de uytkomste belangende, heb ick in veele questien ondervonden dat de myne van de haere geensins en verscheelt. V E. zal vinden dat ick in 't eynde van dit Tractaet, noch eenige van die questien bygevoegt hebbe, achterlaetende nochtans de werckingh; eensdeels om dat ick te veel moeyte te gemoet sagh, indien ick alles nae behooren wilde afdoen; ten anderen om dat my raetsaem dacht, iets overigh te laeten, 'twelck onse Lesers (soo der eenige zijn sullen) mochte dienen tot oeffening en tijdt-verdrijf.*

In s'Graven-
Hage den 27
Apr. 1657.

UE. dienstwilligen dienaer

CHR. HUYGENS van ZUYLICHEM.

VAN

R E K E N I N G H

IN

S P E L E N V A N G E L U C K.

AL-hoewel in de spelen, daer alleen het geval plaets heeft, de uytkomsten onseecker zijn, soo heeft nochtans de kansse, die yemandt heeft om te winnen of te verliesen, haere seeckere bepaling. Als by exempel. Die met een dobbelsteen ten eersten een ses neemt te werpen, het is onseecker of hy het winnen sal of niet; maer hoe veel minder kans hy heeft om te winnen als om te verliesen, dat is in sich selven seecker, en werdt door reeckeningh uyt-gevonden. So mede, als ick tegen een ander in drie spelen uyt speel, ende een spel daer van gewonnen, hebbe, het is noch onseecker wie eerst zal uyt wesen. Doch hoe dat mijn kansse staet tegen de syne, kan seeckerlijck bereeckent werden, en daer door oock bekent, ingevalle wy het spel wilden laten blijven, hoe veel my meerder toe-komen soude van 't geen ingeset is als hem. Ofte oock indien yemandt anders myn spel begeerde over te nemen, waar voor ick hem dat zoude behooren te laten. Hier konnen verscheyde questien uyt ontstaen tusschen 2**,** 3 of meerder getal van speelders, en dewijl diergelijcke reeckeningh geensins gemeen en is ende dickmaels kan te passe komen, soo sal ick hier in 't kort de wegh daer toe aenwijsen, ende daer na oock eenige verklaringe doen aengaende de dobbel-steenen.

Ick neeme tot beyder fondament, dat in het speelen de kansse, die yemant ergens toe heeft, even soo veel weerdt is als het geen, het welck hebbende hy weder tot deselfde kansse kan geraecken met rechtmatigh spel, dat is, daer in niemandt verlies geboden werdt. By exempel. So yemandt sonder mijn weeten in d'eene handt 3 schellingen verbergt, en in d'ander 7 schellingen, ende my te kiesen geeft welck van beyde ick begeere te hebben, ick segge dit my even soo veel weerdt te zijn, als of ick 5 schellingen seecker hadde. Om dat, als ik 5 schellingen hebbe, ick wederom daer toe kan geraecken,[490] dat ick gelijcke kans sal hebben, om 3 of 7 schellingen te krijgen, en dat met rechtmatigh spel: gelijck hier naer sal betoont werden.

I. *V O O R S T E L.*

Als ick gelijcke kans hebbe om a of b te hebben, dit is my so veel weerdt als $(a+b)/2$

Om desen regel niet alleen te bewijsen maer oock eerst uyt te vinden, soo zy gestelt x voor het geene dat mijn kansse weerdt is. Soo moet ick dan x hebbende weder tot de selfde kans konnen geraecken met rechtmatig spel. Laet dit het spel zijn: dat ick tegen een ander speele om x, en dat den anderen daer tegen mede x in-sette: ende dat bedongen zy, dat de geene die wint aen die verliest sal geven a. Dit spel is rechtmaetigh, ende het blijckt dat ick hier door gelijcke kans heb om a te hebben, te weten, als ick 't spel verlies, of $2x$-a, als ick 't win: want alsdan soo treck ick $2x$ die in-geset zijn, daer van ick den anderen moet geven a. Indien nu $2x$-a soo veel waer als b, soo soude ick ghelijcke kans hebben tot a of b. Ick stelle dan $2x-a = b$, so komt $x=(a+b)/2$, voor de waerde van mijn kans. En het bewijs hier van is licht. Want $(a+b)/2$ hebbende, soo kan ick dat tegen een ander waegen die mede $(a+b)/2$ sal insetten, ende bedingen dat die het spel wint, den anderen sal a geven. Waer door ick gelijcke kans sal bekomen om a te hebben, te weeten, als ick verlies, of b als ick win; want alsdan soo treck ick $a+b$ dat in-geset is, ende geef hem daer van a.

In getaelen. Indien ick gelijcke kans heb om 3 te hebben of 7**,** soo is door dit Voorstel mijn kansse 5 weerdt; ende het is seecker dat ick 5 hebbende weder tot de selfde kansse kan geraecken. Want speelende om de selve tegen een ander die daer 5 tegen set, met beding dat de geene die wint den anderen 3 sal geven; soo is dit rechtmaetig spel, ende het blijckt dat ick gelijcke kans hebbe om 3 te hebben, te weeten, als ick verlies, of 7 indien ick win; want alsdan treck ick 10, daer van ick hem 3 geef.

II. *V O O R S T E L.*

Als ick gelijcke kans hebbe tot a of b of c, het is my soo veel weerdt als of ick $(a+b+c)/3$ hadde.

Om dit wederom te vinden, soo zy als vooren gestelt x voor de waerde van mijn kans. Soo moet ick dan x hebbende weder tot de selfde kansse konnen geraecken door rechtmaetig spel. Laet dit het spel zijn, dat ick [491] tegen 2 andere speele, insettende ieder van ons drien x, ende laet ick met den eenen dese voorwaerde maecken, dat soo hy het spel wint hy my sal geven b, ende ick b aen hem, soo ick het kome te winnen. Met den anderen laet ick dese voorwaerde maecken, dat hy het spel winnende my sal geven c, of ick aen hem c als ick het win. Het blijckt dat dit spel rechtmaetig is. Ende ick sal daer door gelijcke kans hebben, om b te hebben, te weeten, als het den eersten wint, of c, als het den tweeden wint, of $3x - b - c$ als ick het win; want dan treck ick $3x$ die ingeset zijn, en geve daer van aen den eenen b, aen den anderen c. Indien nu $3x - b - c$ gelijck waer aen a, so soude ick gelijcke kans hebben tot a of b of c. So stel ick dan $3x - b - c = a$ en komt $x=(a+b+c)/3$**,** voor de waerde van mijn kans. Op gelijcke manier werdt gevonden, dat als ick gelijcke kans hebbe tot a of b of c of d, dit soo veel weerdt is als $(a+b+c+d)/4$, ende soo voorts.

III. *V O O R S T E L.*

Als het getal der kanssen die ick hebbe tot a is p, ende het getal der kanssen die ick tot b heb is q; nemende altijdt dat ieder kans even licht kan gebeuren: Het is my weerdt $(pa+qb)/(p+q)$.

Om desen regel uyt te vinden, so zy wederom x gestelt voor het geene mijn kans weerdt is. So moet ick x hebbende wederom in staet als vooren konnen geraecken door rechtmaetig spel. Laet ick hier toe soo veel speelders nemen, datse met my te saemen het getal van $p + q$ uytmaecken, insettende elck x, soo datter in sal staen $px + qx$, ende elck voor sijn hooft speelende met even goede kans om te winnen. Voorts laat ick met soo veel deser speelders, als het getal q is, ieder in 't bysonder dit verding maecken, dat als hy het spel komt te winnen hy my sal b geven, of ick daer entegens het selfde aen hem als ick het win. Laet ik oock met de rest van de speelders, zijnde $p - 1$**,** dit verding maecken met elck in 't bysonder, dat hy het spel winnende my sal a geven, ende ick hem van gelijcken a indien ick het kome te winnen. Het blijckt dat dit spel met dese voorwaerden rechtmaetig is, niemandt hier door verongelijckt wesende. Het blijckt mede dat ick alsnu q kanssen hebbe tot b, ende $p - 1$ kanssen tot a, en 1 kansse, (te weeten, als ick het win,) tot $px + qx - bq - ap + a$ want alsdan soo treck ick $px + qx$ dat ingeset is, waer van ick aen yder van q speelders moet geven b, en aen yder van $p - 1$ speelders a maeckende te saemen $qb + pa - a$. Indien nu $qx + bx - bq - ap + a$[1] gelijck waer aen a, soo soude ick p kanssen hebben tot a, (want ick alreede $p - 1$ kanssen daer toe hadde) ende q kanssen tot b, ende soude also tot mijn voorige kansse [492] wederom geraeckt zijn. Soo stel ick dan te zijn $px + qx - bq -$

---

[1] moet zijn $px + qx - bq - ap + a$

$ap + a = a$; en komt $x=(ap+bq)/(p+q)$ voor het geene dat mijn kansse weerdt was, gelijck in 't begin is gestelt.

In getaelen. Indien ick 3 kanssen hebbe tot 13**,** en 2 kanssen tot 8: soo heb ick door desen regel soo veel als 11**.** En is licht te thoonen, dat ick 11 hebbende wederom tot de selfde kansse kan geraecken. Want speelende tegen 4 andere, en settende elck van ons vyven 11 in, soo sal ick met 2 van haer verdraegen elck in ‘t bysonder, dat soo hy het spel wint hy my 8 sal geven, of ick aen hem 8, indien ick het winne. Met de ander 2 van gelijcken, dat die van haer het spel wint my sal 13 geven, of ick aen hem 13 als ick het kom te winnen. Welck speelen rechtmaetig is. Ende het blijckt, dat ick daer door 2 kanssen hebbe tot 8, naementlijck als een van de twee die my 8 belooft hebben wint, en 3 kanssen tot 13**;** te weeten als een van de twee andere die my 13 gheven moeten wint, of als ick selver het spel win. Want ick het winnende soo treck ick 't geen ingeset is dat's 55, daer van ick aen elck van 2 moet geven 13**,** en aen elck van de twee andere 8, soo dat voor my dan oock 13 overblijft.

IV. *V O O R S T E L.*

Genomen dan dat ick tegens een ander speele ten dryen uyt, en dat ick alreede 2 spelen hebbe en hy maer een. Ick wil weeten, ingevalle wy het spel niet en wilden voortspeelen, maer het geen ingeset is gerechtelijck wilden deelen, hoeveel my daer van komen soude.

Om nu tot de eerst voor-gestelde questien te komen, aengaende de verdeelingh onder verscheyde speelders te maecken, als haere kanssen ongelijck zijn, soo is 't noodigh van de lichtste te beginnen.

Voor eerst moet acht genomen werden alleen op de spelen, die weder-zijds noch ontbreecken. Want het is seecker, dat, of wy ten 20^{gen} uyt speelden, en dat ick 19 hadde, en die tegens my speelt 18, dat ick even het selfde voordeel soude hebben als nu, hebbende van drie spelen 2 gewonnen en hy een: door dien in beyde gevallen my noch maer een spel ontbreeckt en hem twee spelen.

Voorts om te vinden, wat deel ons elk toekomt, soo moet aengemerkt werden watter soude gebeuren indien wy voort speelden. Het is seecker indien ick het eerste spel quam te winnen, dan soude ik uyt wesen en hebben al dat ingeset is, het welck zy genoemt *a*. Maer indien den anderen het eerste spel won, dan souden wy gelycke kans hebben, elck noch een spel ontbreeckende, en daerom elck gerechtigt zijn tot 1/2 *a*. Het is nu seecker dat ick gelijcke kans heb om dat eerste spel te winnen of te verliesen. Soo heb [493] ick dan gelijcke kans om a te hebben of 1/2 *a*, het welck door het 1^{ste} Voorstel soo veel is als of ick van beyde de helft hadde dat is 3/4 *a*, en blijft voor die tegens my speelt 1/4 *a*. Wiens rekening oock van eersten aen op de selve manier hadde konnen gemaeckt werden. Hier uyt blijckt, dat die mijn spel soude willen overnemen mij 3/4 *a* daer voor kan geven; en dat men dienvolgens altijdt kan 3 tegen 1 setten, als men neemt 1 spel te winnen, eer dat een ander 2 spelen wint.

V. *V O O R S T E L.*

Zy gestelt dat my 1 spel ontbreeckt, en die tegens my speelt 3 spelen. Nu moet men de verdeeling maecken.

Laet ons wederom acht nemen, in wat staet wy souden zijn, indien ick of hy het eerste spel quam te winnen. Als ick het won soo had ick het geen in-geset is dat is *a*, maer als hy het eerste spel won, dan souden hem noch 2 spelen ontbreecken tegen mijn 1, en wy souden daerom in staet zijn gelijck in 't voorgaende voorstel gestelt wierdt, en my toekomen 3/4 *a*, gelijck aldaer bethoont is. Soo heb ick dan een kans tegen een om *a* te hebben of 3/4 *a*, het welck so veel is door het 1^{ste} Voorstel als 7/8 *a*. En blijft 1/8 *a* voor den anderen. Soo dat mijn kans is tot de syne als 7 tot 1.

Gelijck nu tot dese reeckeningh vereyscht is geweest de voorgaende, so is wederom dese nodigh tot de volgende, te weeten, als men stelt dat my 1 spel ontbreeckt, ende mijn party 4 spelen. En werdt op gelijcke manier bevonden, dat my komt 15/16 van 't geen ingeset is, en hem 1/16.

VI. *V O O R S T E L.*

Zij gestelt dat my twee spelen ontbreecken, en hem die tegen my speelt drie spelen.

Nu zal gebeuren door het eerste spel, of dat my noch 1 spel sal ontbreecken en hem 3 (toekomende my daerom door het voorgaende 7/8 *a*), of dat ons elck noch twee spelen sullen ontbreecken, waer door my komt 1/2 *a*, om dat dan elck even goede kans heeft. Maer ick heb een kans tegen een, om het eerste spel te winnen of te verliesen; soo heb ick dan ghelijcke kans tot 7/8 *a* of 1/2 *a*, het welck my weerdt 11/16 *a* door het eerste Voorstel. Soo dat my komen elf deelen van 't geen ingestelt is, en die tegens my speelt vijf deelen.

VII. *V O O R S T E L.*

Zy gestelt dat aen my noch twee spelen ontbreecken, en hem 4 spelen.

Soo sal ick het eerste spel winnende noch 1 spel tegen 4 te winnen hebben; of het selve verliesende, noch 2 tegen 3. Soo dat ick gelijcke kans heb [494] tot 15/16 *a* of 11/16 *a*, dat soo veel is als 13/16 *a*, door het 1ste Voorstel. Waer uyt blijckt dat het beter kans is 2 spelen te moeten winnen tegen 4, als een spel tegen twee. Want in dit laetste geval, te weeten, van 1 tegen 2**,** so is mijn deel 3/4 *a***,** door het 4de Voorstel, zijnde minder als 13/16 *a*.

VIII. *V O O R S T E L.*

Laet ons nu stellen: Dat drie persoonen t'samen speelen, daer van den eersten 1 spel ontbreeckt, den tweeden mede 1 spel, maer den derden 2 spelen.

Om het deel van den eersten te vinden, so moet weder aengemerckt werden wat hem soude komen, indien hy of een van de twee anderen het eerste spel quam te winnen. Als hy het won soo had hy het geen dat ingeset is, 't welck zy *a*. Als het den tweeden won soo hadde den eersten niets, want den tweeden soude daer mede uyt zijn. Als het den derden won soo soude aen elck van drien noch 1 spel ontbreecken, en daerom den eersten so wel als elck van d'andere 1/3 *a* toekomen. Soo isser dan voor den eersten 1 kans tot *a*, 1 kans tot 0**,** en een kans tot 1/3 *a*, (want het even licht kan gebeuren aen yeder van drien het eerste spel te winnen,) het welck hem weerdt is 4/9 *a* door het 2de Voorstel. Soo komt dan oock voor den tweeden 4/9 *a*, en voor den derden blijft over 1/9 *a*. Wiens deel in 't bysonder oock hadde konnen gevonden worden, en daer door de andere haer deelen bepaelt.

IX. *V O O R S T E L.*

Om tusschen soo veel speelders als voor-gestelt zijn, waer van d'eene meer en d'ander minder speelen ontbreecken een ieder haer deel te vinden, soo moet ingesien worden, wat hem, wiens deel men begeert te weeten, soude toekomen, indien of hy, of elck van d'andere in 't besonder het eerste volgende spel quam te winnen. Dit dan alles te saemen geaddeert en door het getal der speelders gedeelt, soo komt het gesochte gedeelte van den eenen.[2]

Zy genomen dat 3 persoonen A, B, en C te saemen speelen, en dat aen A een spel ontbreeckt, aen B 2 spelen, en aen C van gelijcken 2 spelen. Men begeert te weeten wat deel aen B toekomt van het geene ingeset is, het welck zy genoemt *q*.

Voor eerst moeten wy ondersoecken wat B soude komen, als hy selfs, of A, of C het eerste volgende spel quam te winnen. Als het A won, so soude hy uyt zijn, en dienvolgens soude B toekomen 0**.** Als B selfs het won, so ont[495]brack hem noch 1 spel, en aen A mede 1 spel, maer aan C 2 spelen. Daerom soude B in dit geval toekomen 4/9 *q* door het 8^{ste} Voorstel.

Eyndelijck als C het eerste volgende spel quam te winnen, soo soude A en C elck 1 spel ontbreecken, maer aen B 2 spelen; en dienvolgens soude B komen 1/9 *q*, door het selfde 8^{ste} Voorstel. Nu moet geaddeert werden het geen in dese 3 voorvallen aen B soude toekomen, te weeten, 0, 4/9 *q*, 1/9 *q*, en komt 5/9 *q*. Dit door 3, het getal des speelders, gedeelt, komt 5/27 *q*. 'Twelck B zijn gerechte deel is. Het bewijs nu hier van blijckt door het 2^{de} Voorstel. Want naer dien B gelijcke kans heeft tot 0, 4/9 *q*, of 1/9 *q*, soo heeft hy door het 2^{de} Voorstel soo veel als (0 + 4/9 *q* + 1/9 *q*)/ 3 dat is 5/27 *q*. Ende het is seecker dat desen divisor 3 het getal van de speelders is.

Doch om te weeten, wat iemandt komt in elck geval, te weeten, als hy selfs of een van d'andere het eerste volgende spel wint: soo moeten de simpelste voorvallen eerst uytgevonden werden, en door haer behulp de volgende. Want gelijck dit laetste voorval niet konde afgedaen werden sonder dat eerst dat van het 8^{ste} Voorstel uytgereeckent was, in 't welck de resterende spelen waeren 1, 1, 2**,** soo kan insgelijcks ieders deel niet gevonden werden in so een geval, als de resterende spelen zijn 1, 2, 3, of men moet eerst uytgereeckent hebben het voorval van 1, 2, 2, gelijck wy terstont gedaen hebben, ende noch dat van 1, 1, 3, het welck door behulp van het 8^{ste} Voorstel mede konde bereeckent werden. Op dese manier dan werden vervolgens al de voorvallen uytgevonden, die in de volgende tafel zijn vervat, en oneyndelijcke andere.

Tafel voor drie speelders.

Spelen die haer ontbreecken	1 . 1 . 2	1 . 2 . 2	1 . 1 . 3	1 . 2 . 3
Haer deelen.	4 . 4 . 1	17 . 5 . 5	l3 . 13 . 1	19 . 6 . 2
	9	27	27	27

Spelen die haer ontbreecken.	1 . 1 . 4	1 . 1 . 5	1 . 2 . 4	1 . 2 . 5
Haer deelen.	40 . 40. 1	121 . 121 . 1	178 . 58 . 7	542 . 179 . 8
	81	243	243	729

Spelen die haer ontbreecken.	1. 3 . 3	1 . 3. 4	1 . 3. 5
Haer deelen.	65 . 8 . 8	616 . 82 . 31	629 . 87 . 13
	81	729	729

Spelen die haer ontbreecken.	2 . 2 . 3	2 . 2 . 4	2 . 2 . 5	2 . 3 . 3	2 . 3 . 4	2 . 3 . 5
Haer deelen.	34.34.13	338 . 338 . 53	353 . 353. 23	133 . 55 . 55	451 . 195 . 83	1433 . 635 . 119
	81	729	729	243	729	2187

[496]De dobbel-steenen aengaende konnen dese questien werden voorgestelt, te weeten, van hoeveel reysen men kan nemen met eene steen een 6 te werpen of een van d'ander ooghen. Oock van hoeveel reysen 2 sessen met 2 steenen, of 3 sessen met 3 steenen. Ende noch veel andere. Om welcke te solveeren, so moet hier op werden acht genomen.

Eerstelijck dat op 1 steen zijn 6 verscheyde werpen, die even licht konnen gebeuren. Want ick neeme dat een dobbel-steen de perfecte figure van een Cubus heeft.

[2] Waarschijnlijk zijn de tekst van dit voorstel en de tekst van de eerste alinea van de uitleg verwisseld.

Voorts, dat op 2 steenen sijn 36 verscheyde werpen, die insgelijcx even licht konnen voorkomen. Want tegen elcke werp van de eene steen kan een van de 6 werpen van d'andere steen te gelijck boven leggen. En 6 mael 6 maekt 36.

Oock dat op 3 steenen zijn 216 werpen. Want tegen elck van de 36 werpen der 2 steenen kan een van de 6 werpen komen, die op de derde zijn. En 6 mael 36 maeckt 216.

Van gelijcken blijkt, dat op 4 steenen zijn 6 mael 216 werpen, dat is, 1296; en dat men soo voort de werpen van soo veel steenen als men wil kan bereeckenen, altijdt door het toe-doen van eene steen 6 mael de werpen der voorgaende nemende.

Vorders moet men weeten, dat op twee steenen maer eene werp en is van 2 of 12 oogen, en 2 werpen van 3 of 11 oogen. Want gevende aen de steenen de naemen van A en B, soo blijckt dat om 3 oogen te werpen op A een aes kan zijn, en op B een 2; of op B een aes, en op A een 2. Van gelijcken om 11 oogen te hebben, so kan op A 5 zijn, en op B 6; of op A 6 en op B 5. Van 4 oogen zijnder 3 werpen, te weeten, A 1, B 3; of A 3, B 1; of A 2, B 2. Van 10 oogen insgelijcks 3 werpen. Van 5 of 9 oogen 4 werpen. Van 6 of 8 oogen 5 werpen. Van 7 oogen 6 werpen.

$$\text{Op 3 steenen vindt men van}\left\{\begin{array}{l} 3\text{ of }18 \\ 4\text{ of }17 \\ 5\text{ of }16 \\ 6\text{ of }15 \\ 7\text{ of }14 \\ 8\text{ of }13 \\ 9\text{ of }12 \\ 10\text{ of }11 \end{array}\right\}\text{oogen}\left\{\begin{array}{l} 1 \\ 3 \\ 6 \\ 10 \\ 15 \\ 21 \\ 25 \\ 27 \end{array}\right\}\text{werpen}$$

X. *V O O R S T E L.*

Te vinden van hoeveel reysen men kan neemen een 6 te werpen met eene steen.

Die het ten eersten neemt, het is seecker dat hy 1 kans heeft om te winnen, ende te hebben het geen ingeset is, tegen 5 kanssen om te verliesen. Want daer zijn 5 werpen tegen hem, en maer een voor hem. Het geen ingeset is zy genoemt *a*. Soo heeft hy dan 1 kans om te hebben *a*, en 5 kanssen om 0 te hebben, het welck door het 2^{de} Voorstel[3] so veel is als 1/6 *a*. En blijft voor die [497] het hem geeft te werpen 5/6 *a*. Soo dat hy maer 1 tegen 5 kan setten, die het ten eersten neemt.

Die van tween eens een 6 neemt te werpen, werdt sijn deel aldus bereeckent. Indien hy de eerste reys een 6 raeckt, soo heeft hy *a*. Indien hy mist, soo heeft hy noch eene werp, dewelcke door het voorgaende soo veel is als 1/6 *a*. Maer hy heeft maer een kans om in de eerste reys een 6 te werpen, en 5 kanssen om die te missen. So heeft hy dan van eersten aen 1 kans om *a* te hebben, en 5 kanssen tot 1/6 *a*, het welck door het 2^{de} Voorstel[4] soo veel is als 11/36 a. Ende blijft voor die het hem geeft 25/36 *a*. Soo dat die het van tween neemt 11 tegen 25 kan stellen, dat is, min als 1 tegen 2**.**

Hier uyt nu werdt op deselve manier bereeckent, dat die van dryen eens neemt een 6 te werpen, zijn deel 91/216 *a*. Soo dat hy kan 91 tegen 125 setten, dat is, weynig min als 3 tegen 4.

Die het van vieren neemt, zijn deel is 671/1290[5] *a*. Soo dat hy 671 tegen 625 kan setten, dat is, meer als 1 tegen 1.

Die het van vyven neemt, syn deel is 4651/7776 *a*, ende kan 4651 tegen 3125 setten, dat is, weynig min als 3 tegen 2.

---

[3] Dit moet het 3^{de} Voorstel zijn

[4] Dit moet het 3^{de} Voorstel zijn

[5] Dit moet zijn 671/1296

Die het van sessen neemt, sijn deel is 31031/46656 ende kan 31031 tegen 15625 setten, dat is, weynigh min als 2 tegen 1.

Aldus kan men vervolgens yder getal van werpen vinden. Maer men kan oock met grooter sprongen voort gaen, gelijck wy in 't volgende Voorstel aenwysen sullen, sonder 't welck de Reeckening anders seer lang soude vallen.

XI *V O O R S T E L.*

Te vinden van hoe veel reysen men kan neemen 2 sessen te werpen met 2 steenen.

Die het ten eersten neemt, heeft 1 kans om te winnen, dat is, om *a* te hebben, tegen 35 kanssen om te verliesen ofte 0 te hebben; om datter 36 werpen zijn. Sulcx dat hy door het 2de Voorstel[6] heeft 1/36 a.

Die het van tween neemt, indien hy de eerste reys 2 sessen werpt, soo heeft hy *a*. Indien hy d'eerste reys mist, soo heeft hy noch eene werp overig, dat is, door 't geen geseyt is, soo veel als 1/36 *a*. Maer hy heeft maer 1 kans om in de eerste reys 2 sessen te werpen, tegen 35 kanssen om die te missen. Soo heeft hy dan van eersten aen 1 kansse tot *a*, en 35 kanssen tot 1/36 *a*, het welck door het 2de Voorstel[7] soo veel is als 71/1296 *a*. En blijft voor die het hem geeft te werpen 1225/1296 *a*. Hier uyt nu kan gevonden worden, wat kans ofte deel hy heeft die het neemt van 4 werpen, overslaende de kansse van die het neemt van dryen.

Want die het van vieren neemt, indien hy het doet in een van de 2 eerste reysen, soo heeft hy *a*; indien niet, soo heeft hy noch 2 werpen overig, dat is,[498]door 't geen te vooren geseyt is, soo veel als 71/1296 *a*. Maer hy heeft oock door het selve 71 kanssen om van de 2 eerste werpen eens 2 sessen te werpen, tegen 1225 kanssen om die te missen. Soo heeft hy dan van eersten aen 71 kanssen tot *a*, en 1225 kanssen tot 71/1296 *a*; het welck door het 2de Voorstel[8] so veel weerdt is als 178991/1679516 *a*. Ende blijft voor die het hem geeft 1500625/1679516 *a*. Staende haere kanssen tegen een, als 178991 tegen 1500625.

Hier uyt werdt vorders op deselve manier gevonden de kans, van die van 8 reysen eens 2 sessen neemt te werpen. En daer uyt dan wederom de kans, van die het neemt van 16 reysen. En uyt dese sijn kans, ende uyt de kans van die het neemt van 8 werpen, werdt gevonden de kans van die het neemt van 24gen In welcke werckingh, alsoo voornamentlijck maer gesocht werdt in wat getal van werpen de gelijcke kansse begint tusschen die het neemt en geeft, soo magh men van de getalen, die anders seer groot souden werden, een deel van de achterste Cijfers af-snijden. Ick vinde dat die het neemt van 24gen noch yets te kort komt; en dat het eerst van 25gen genomen kan werden met voordeel.

XII *V O O R S T E L.*

Te vinden met hoe veel steenen men kan nemen ten eersten 2 sessen te werpen.

Dit is soo veel dan of men wilde weeten, in hoe menige werp met eene steen men kan nemen tweemael een 6 te raecken. Het welck die het in 2 werpen nam, soude, door het geen hier te vooren is bewesen, 1/36 *a* toekomen.

Die het in dryen nam, indien zijn eerste werp geen 6 en waer, soo had hy noch 2 werpen, die beyde een 6 souden moeten zijn; het welck geseyt is soo veel weerdt te zijn als 1/36 ***a*****.** Maer zijn eerste werp een 6 wesende, soo behoeft hy van tween noch maer eens een 6 te werpen, het welck soo veel is door het 10de Voorstel als of hy 11/36 *a* hadde. Nu is seecker dat hy 1 kans heeft om ten eersten een 6 te werpen, tegen 5 kanssen om die te missen. Soo heeft hij dan van

---

6 Dit moet het 3de Voorstel zijn
7 Dit moet het 3de Voorstel zijn
8 Dit moet het 3de Voorstel zijn

eersten aen 1 kans tot 11/36 *a*, en 5 kanssen tot 1/36 *a*, het welck door het 2de Voorstel[9] soo veel is als 16/216 *a* of 2/27 *a*. Op dese manier t'elckens een werp meer nemende soo werdt bevonden, dat in 10 werpen met eene steen, of met 10 steenen ten eersten, kan genomen werden 2 sessen te werpen, en dat met voordeel.

XIII. *V O O R S T E L.*

Als ick tegen een ander speel met 2 steenen alleen eene werp, op conditie, dat, indien der 7 oogen komen, ick winnen sal; maer hy, indiender 10 oogen komen; en ingevalle iets anders, dat wy dan gelijckelijck deelen sullen het[499]geen ingeset is: Te vinden wat deel daer van ons elck toekomt.

Dewijl van de 36 werpen, die op 2 steenen zijn, 6 werpen zijn van 7 oogen, en 3 werpen van 10 oogen, soo resteren noch 27 werpen, die het spel konnen kamp maecken. Het welck gebeurende so komt ons ieder 1/2 *a*. Maer als het geen kamp is, soo heb ick 6 kanssen om te winnen dat is om *a* te hebben, en 3 kanssen om te verliesen ofte 0 te hebben; het welck door het 2de[10] soo veel is, als of ick in sulcken geval 2/3 *a* hadde. Soo heb ick dan van eersten aen 27 kanssen tot 1/2 *a*, en 9 kanssen tot 2/3 *a*; het welck door het 2de[11] soo veel is als 13/24 *a*. En blijft voor den anderen 11/24 *a*.

XIV. *V O O R S T E L.*

Als ick en noch een ander met beurten werpen met 2 steenen, ende bespreecken dat ick sal winnen, soo haest ick 7 ooghen werp, ende hy, soo haest als hy 6 ooghen werpt, mits dat ick hem de voorwerp geve: Te vinden in wat reden mijn kans tegen de sijne staet.

Laet mijn kans weert sijn x, ende het geen ingeset is sy genoemt a; soo is dan de kans van den anderen weerdt a-x. Het blijckt ook dat elcke mael, als sijn beurt van werpen weder komt, mijn kans dan weder moet x weerdt zijn. Maer soo dickmaels als het mijn beurt is te werpen, soo moet mijn kans meerder weerdt zijn. Laet ons y stellen voor het geene dat se dan weerdt is. Overmits nu datter 5 werpen zijn van de 36 werpen op 2 steenen, die mijn tegen speelder 6 ooghen konnen geven, ende het spel doen winnen, en 31 werpen die hem doen missen, dat is, die mijn beurt van werpen doen komen: soo heb ick dan, als hy begint te werpen, 5 kanssen om 0 te hebben en 31 kanssen om te hebben y; het welck door het 3de Voorstel weerdt $31y/36$. Maer daer is gestelt, dat mijn kans van eersten aen x weerdt is. Soo is dan $31y/36 = x$, en daerom $y = 36x/31$. Voorts soo is gestelt, dat, mijn beurt van werpen gekomen zijnde, mijn kans dan y weerdt is. Maer ick sullende werpen, soo heb ick 6 kanssen tot a, om datter 6 werpen zijn van 7 ooghen, dewelcke my doen winnen; en ick heb 30 kanssen om de beurt van mijn tegenspeelder te doen wederkeeren, dat is, om voor my x te hebben. Soo is dan y soo veel weerdt als 6 kanssen tot a en 30 kanssen tot x; 't welck door het 3de Voorstel soo veel is als $(6a + 30x)/36$. Dit dan zijnde gelijck aen y; ende te voren gevonden zijnde $36x/31 = y$, soo moet $(30x + 6a)/36$ [500]gelijck zijn aen $36x/31$ waer uyt gevonden werdt $x = 31a/62$[12], het welck de weerde is van mijn kans. En dienvolgens sal de kans van die tegens my speelt weerdt zijn $30a/61$. Soo dat onse kanssen tegen malkander staen, als 31 tot 30.

[9] Dit moet het 3de Voorstel zijn
[10] Dit moet het 3de Voorstel zijn
[11] Dit moet het 3de Voorstel zijn
[12] Dit moet 61 zijn

Volgen tot een besluyt noch eenige Voorstellen.

I. A en B speelen teghen malkander met 2 steenen, op dese conditie: dat A sal winnen als hy 6 oogen werpt, maer B sal winnen als hy 7 oogen werpt. A sal eerst eene werp doen; daerna B twee werpen achtervolgens; dan weder A 2 werpen; en soo voorts, tot dat d'een of d'ander sal winnen. De vrage is in wat reden de kans van A staet tegen die van B? antw. als 10355 tot 12276.

II. Drie speelders A, B, en C nemende 12 schijven, van de welcke 4 wit zijn en 8 swart, speelen op conditie, dat die van haer blindeling eerst een witte schyve sal gekosen hebben winnen sal, en dat A de eerste sal nemen, 13 de tweede, en dan C, en dan wederom A, en soo vervolgens met beurten. De vraghe is in wat reden haere kanssen staen tegens malkander?

III. A wed tegens B, dat hy uyt 40 kaerten, dat is, 10 van ieder soort, 4 kaerten uyttrecken sal, soo dat hy van elcke soorte een sal hebben. Hier wordt de kans van A tegen die van B gevonden, als 1000 tegen 8139.

IV. Genomen hebbende ghelijck hier te vooren 12 schyven, 4 witte en 8 swarte; Soo wed A tegen B dat hy blindeling 7 schyven sal daer uyt nemen, onder welcke 3 witte sullen zijn. Men vraegt in wat reden de kans van A staet tegen die van B.

V. A en B genomen hebbende elck 12 penningen spelen met 3 dobbelsteenen op dese conditie: dat, als'er 11 oogen geworpen worden, A een penning aen B moet geven; maer als’er 14 geworpen werden, dat dan B een penning aen A moet geven; en dat hy het spel winnen sal, die eerst al de penningen sal hebben. Hier werdt ghevonden de kans van A tegen die van B te zijn, als 244140625 tot 282429536481.

E Y N D E.